El Teorema del Número Primo y Algunas Equivalencias

por

Danny Arlen de Jesús Gómez Ramírez

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar al Título de

Matemático

Carlos M. Parra L.

Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Septiembre 2004

Contenido

Introducción

Desde los tiempos de Euclides se ha sabido sobre la infinitud de los números primos, pero un problema mucho más complicado ha sido la descripción precisa de su distribución en la recta real. En este sentido, no se hizo ningún avance especial hasta que, al final del siglo $XVIII$, C. F. Gauss y A. M. Legendre consideraron la función $\pi(x)$, que cuenta el número de primos menores o iguales que x y conjeturaron su crecimiento asintótico. Aunque estas dos propuestas eran ligeramente diferentes, su estudio posterior generó lo que se conoce en la actualidad como el Teorema del Número Primo (TNP), conjeturado entre 1792 y 1808. El enunciado estándar del TNP afirma que la función $\pi(x)$ es asintótica con la función $\frac{x}{\log(x)}$.

La primera persona en establecer el verdadero orden de crecimiento de $\pi(x)$ fue el matemático ruso P. L. Chebyshev quien estableció, a mediados del siglo XIX, y por métodos elementales, la desigualdad $0.921x/\log(x) < \pi(x) < 1.106x/\log(x)$, para x suficientemente grande. Chebyshev también demostró que si $\pi(x)/\{x/\log(x)\}$ tiene un límite cuando $x \to \infty$, entonces dicho límite es 1. Los intentos posteriores por mejorar los métodos anteriores arrojaron mejores estimativos; pero habrían de pasar cien años antes de que se pudiera obtener una prueba del TNP por métodos elementales (esto es, sin hacer uso del análisis complejo).

Poco después de la publicación del trabajo de Chebyshev, el matemático G. F.B. Riemann trazó el camino para una demostración del TNP en su famosa publicación sobre la función ζ, la cual había sido introducida por L. Euler en el siglo $XVIII$.

El TNP fue establecido por Jacques Hadamard y Charles-Jean de la Vallée Poussin independientemente en 1896 (ver, [VALL] y [HADA]). Sus demostraciones siguieron los lineamientos planteados anteriormente por Riemann y, especialmente, la denominada ecuacion funcional, junto con la teoría de funciones enteras desarrollada por Hadamard. Sus demostraciones constan básicamente de dos partes: mostrar que la función Zeta de Riemman $\zeta(z)$ no tiene ceros en la recta $\mathrm{Re}(z) = 1$ y deducir el TNP de este hecho. Algunos años después E. Landau hizo simplificaciones importantes al ofrecer una demostración del TNP sin hacer uso de la ecuación funcional. Posteriormente, N. Wiener y S. Ikehara utilizaron teoremas Tauberianos para mostrar la equivalencia entre el TNP y la ausencia de ceros de la función ζ en la recta $Re(z) = 1$. Lo anterior posiblemente motivó la famosa afirmación de G. H. Hardy de que era muy improbable la existencia de una prueba elemental del TNP que no usara Anális y que, de existir, se deberian hacer a un lado los textos de análisis complejo y empezar de nuevo. No deja de resultar irónico que dos años después de la muerte de Hardy se publicaran pruebas elementales del TNP por parte de P. Erdos y A. Selberg. Dichas pruebas son elementales en el sentido de que no usan variable compleja, pero son bastante intrincadas y no ofrecen una mejor intuición sobre los conceptos empleados que las pruebas analíticas convencionales (ver [APOS], [ROSE]).

En 1980 D.J. Newman encontró una versión simple del argumento tauberiano clásico que aparece en la prueba analítica del TNP (ver [NEWM]). Este consiste en usar la analiticidad de la función $(z-1)\,\zeta(z)$ en el semiplano cerrado $\{z : \mathrm{Re}(z) \geq 1\}$ y el hecho de que esta función no se anula en dicho semiplano. En lugar del teorema de Wiener-Ikehara, o de la aplicación usual de la integral de inversión de Mellin, el método de Newman utiliza solo la teoría básica de variable compleja para estimar ciertas integrales sobre contornos finitos (ver [LANG], [KORE] y [ZAGI]).

Uno de los objetivos de esta monografía es la exposición completa de la prueba de Newman, de modo que dicha demostración sea accesible a cualquier persona con un conocimiento básico de variable compleja equivalente al nivel alcanzado en un curso de pregrado. El segundo objetivo es demostrar algunas equivalencias del TNP que son de gran utilidad y en cuya demostración se utilizan los métodos de estimación de la Teoría Analítica de Números. En esta última parte nos referiremos principalmente a los textos [APOS] y [ROSE] donde aparecen algunas de las mencionadas equivalencias.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo enunciaremos algunos resultados básicos de variable compleja, necesarios para la prueba analítica del teorema del número primo. Supondremos que el lector esta familiarizado con los primeros seis capítulos del texto de análisis complejo de Serge Lang y con el texto de Bruce Palka.

Teorema 1.0.1 *Supongamos que f es una función continua en un abierto U y que F es una primitiva para f en U. Si $\gamma : [a, b] \to U$ es un camino suave, entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = [F(z)]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} .$$

Prueba. Ver [PALK] página 126. ■

Definición 1.0.1 *Sea $\{u_n\}$ $(n = 1, 2, ...)$ una sucesión de números complejos distintos de cero. Decimos que el producto*

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

converge absolutamente, si $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln u_n$$

converge absolutamente, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln u_n|$ converge.

Notemos que para n suficientemente grande, podemos escribir $u_n = 1 - \alpha_n$, donde $|\alpha_n| < 1$. De la condición de convergencia absoluta se sigue entonces que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - \alpha_n)$$

converge; así, la sucesión de sumas parciales

$$\sum_{n=1}^{N} \ln u_n$$

tiene limite. Dado que la función exponencial es continua, podemos tomar la exponencial de dichas sumas parciales para deducir que

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} u_n$$

existe.

Teorema 1.0.2 *Sea $\{\alpha_n\}$ una secuencia de números complejos con $\alpha_n \neq 1$ para todo n. Supongamos además que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$$

existe. Entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-\alpha_n)$$

converge absolutamente.

Prueba. ver [LANG], página 357. ■

Teorema 1.0.3 (Teorema del Residuo) *Supongamos que f es una función analítica salvo singularidades aisladas en un subcojunto abierto U del plano complejo. Supongamos además que $E \neq \phi$ es el conjunto de singularidades de f en U y que σ es un ciclo en $U - E$ homologo a cero en U. Entonces*

$$\int_\sigma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z\in E} n(\sigma, z) res(z, f)$$

Prueba. Ver [PALK] página 323. ■

Teorema 1.0.4 (Criterio M de Weierstrass) *Supongamos que cada término en una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ está definido en un conjunto A. Si existe una sucesión $\{m_n\}$ de números reales tales que*

$$|f_n(z)| \leq m_n,$$

para cada z en A y tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolutamente y uniformemente en A.

Prueba. Ver [PALK] página 253. ■

Teorema 1.0.5 (Cauchy) *Sea σ un ciclo en un abierto U. Entonces $\int_\sigma f(z)dz = 0$ para cada función f analitica en U si y solo si σ es homólogo a cero en U.*

Prueba. Ver [PALK] página 188. ■

Capítulo 2

Conceptos Básicos

En este capítulo introduciremos los conceptos y teoremas básicos de la teoría clásica de números, los cuales usaremos para probar el teorema del número primo junto con algunas de sus equivalencias.

2.1 Divisibilidad y números primos

Un entero a se dice divisible por un entero $b \neq 0$, si existe otro entero c tal que $a = bc$. Esta relación también se expresa diciendo que b divide a a, que a es múltiplo de b o que b es un divisor de a y se denota por $b \mid a$.

Dados enteros a y b, con al menos uno distinto de cero, se define el máximo común divisor de ellos como el máximo entero positivo que divide a ambos, y se denota por (a, b). Es un ejercicio elemental demostrar que siempre existe dicho número y que es único. Si $(a, b) = 1$ se dice que a y b son primos relativos.

Un entero positivo $p > 1$ se dice primo si sus únicos divisores positivos son 1 y p. Supondremos que cada entero $n > 1$, se puede representar como producto de primos en forma única salvo el orden de los factores y que existe un número infinito de numeros primos.

2.2 Funciones aritméticas y algunos ejemplos

Las funciones que estudiaremos en este trabajo son las llamadas funciones aritméticas, o funciones de la teoría de los números, que son simplemente funciones con valores reales o complejos cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

A continuación definiremos algunas funciones aritméticas, las cuales tendrán un papel fundamental en la distribución de los números primos.

La función de Möbius

Definición 2.2.1 *La función μ de Möbius es una función aritmética definida así:*

$\mu(1) = 1$*;*

si $n > 1$ *escribimos* $n = P_1^{\alpha_1} \ldots P_k^{\alpha_k}$, *con* P_i *primo para* $i = 1, 2, \ldots, k$. *Si* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 1$, *entonces* $\mu(n) = (-1)^k$; *en caso contrario* $\mu(n) = 0$.

Notemos que $\mu(n) = 0$ si y solo si n admite un divisor cuadrado mayor que uno.

La función indicatríz de Euler

Definición 2.2.2 *La función φ de Euler se define como el número de enteros positivos menores que n que son primos relativos con n.*

Teorema 2.2.1 *Si $n \geq 1$ entonces*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left[\frac{1}{n}\right], \tag{2.1}$$

donde $[.]$ denota la función "mayor entero" y d recorre todos los divisores positivos de n.

Prueba. El teorema es obviamente cierto para $n = 1$. Suponemos $n > 1$ y escribimos $n = P_1^{\alpha_1}...P_k^{\alpha_k}$. En la suma (2.1) los únicos términos no nulos provienen de $n = 1$ y de los divisores de n que son productos de primos distintos. Así,

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \mu(n) &= \mu(1) + \mu(P_1) + ... + \mu(P_k) + \mu(P_1P_2) + ... + \mu(P_{k-1}P_k) + ... + \mu(P_1...P_k) \\ &= 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + ... + \binom{k}{k}(-1)^k = (1-1)^k = 0.\end{aligned}$$

■

Teorema 2.2.2 *Si $n > 1$, tenemos*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n. \tag{2.2}$$

Prueba. Sean $N = \{1, 2, .., n\}$, $A(d) = \{k \in N : (k, n) = d\}$. Claramente los $A(d)$, con d recorriendo los divisores positivos de n, constituyen una partición para N. Sea además $f(d)$ el número de elementos de $A(d)$; veamos que $f(d) = \varphi(\frac{n}{d})$. En efecto, dado que $(k, n) = d$ si, y sólo si, $(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}) = 1$, y además $0 < k < n$ si, y sólo si, $0 < \frac{k}{d} < \frac{n}{d}$, existe una correspondencia biyectiva entre los elementos de $A(d)$ y los enteros m tales que $0 < m < \frac{n}{d}, (m, \frac{n}{d}) = 1$. Pero por definición hay $\varphi(\frac{n}{d})$ de tales enteros. Así, se cumple que

$$n = \sum_{d|n} A(d) = \sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \varphi(d),$$

donde la segunda y tercera sumatorias son iguales ya que, si d recorre los divisores positivos de n, $\frac{n}{d}$ también recorre los divisores positivos de n. ■

La función de Mangolt

Definición 2.2.3 *La función de Mangolt* Λ *es una función aritmética definida como* $\ln(p)$, *si* $n = p^m$ *con primo* p *y* $m > 0$*; y como cero en otro caso.*

Teorema 2.2.3 *Si* $n \geq 1$, *tenemos*

$$\ln(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d). \tag{2.3}$$

Prueba. El teorema es claramente cierto para $n = 1$. Sea $n > 1$, con $n = P_1^{\alpha_1}...P_k^{\alpha_k}$ y tomemos logaritmos a ambos lados para obtener

$$\ln(n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ln(Pi). \tag{2.4}$$

Ahora, en la suma de (2.3), los únicos términos no nulos provienen de los divisores de n que son potencias de primos. Luego,

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{\alpha_i} \Lambda(P_i^m) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{\alpha_i} \ln(P_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ln(Pi) = \ln(n).$$

Así queda probado el teorema. ■

La función π

Definición 2.2.4 *Para cada* $x > 0$ *definimos la función* π *por la formula* $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$, *donde* p *recorre todos los primos menores o iguales a* x.

La función divisor

Definición 2.2.5 *La función divisor* τ *es una función aritmética definida como*

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1; \tag{2.5}$$

de este modo, $\tau(n)$ *cuenta el numero de divisores positivos de* n.

Las funciones de Chebyshev

Definición 2.2.6 *Para cada* $x > 0$ *definimos la funciones* ϑ *y* ψ *de Chebyshev por las siguientes fórmulas:*

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

y

$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \ln(p),$$

donde p *recorre todos los primos menores o iguales a* x.

2.3 Producto de Dirichlet de funciones aritméticas

Definición 2.3.1 *Si* f *y* g *son funciones aritméticas, definimos su producto de Dirichlet como la función aritmética* h*, denotada por* $f * g$*, dada por la fórmula*

$$h(n) = (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{a.b=n} f(a)g(b),$$

donde a *y* b *recorren los enteros positivos tales que* $a.b = n$ *y* d *recorre los divisores positivos de* n.

De la definición anterior se sigue inmediatamente que $f*g = g*f$; además, si denotamos por I a la función aritmética definida como $I(1) = 1$ y $I(n) = 0$ para $n > 1$, se verifica trivialmente que $I * f = f$, para toda función aritmética f. Por otra parte, es un ejercicio elemental probar que $(f * g) * h = f * (g * h)$ para f, g, h funciones aritméticas.

Teorema 2.3.1 *Si* f *es una función aritmética con* $f(1) \neq 0$, *entonces existe una única función aritmética* f^{-1}, *llamada la inversa de Dirichlet de* f, *tal que*

$$f * f^{-1} = I,$$

donde f^{-1} *se obtiene de las siguientes fórmulas de recurrencia:*

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}; \qquad f^{-1}(n) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(\frac{n}{d}) f^{-1}(d) \quad para \quad n > 1.$$

Prueba. Veamos que la ecuación $(f * f^{-1})(n) = I(n)$ tiene una única solución dada por los valores de $f^{-1}(n)$. Para $n = 1$ debemos resolver la ecuación $(f * f^{-1})(1) = I(1)$ que es equivalente a $f(1)f^{-1}(1) = 1$, pero esta ecuación tiene una única solución dada por $f^{-1}(1) = (f(1))^{-1}$. Ahora supongamos que los valores de $(f^{-1})(k)$ están unívocamente determinados para $k < n$; así, debemos resolver la ecuación

$$\sum_{d|n} f(\frac{n}{d}) f^{-1}(d) = 0,$$

que es equivalente a

$$f(1)f^{-1}(n) + \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(\frac{n}{d})f^{-1}(d) = 0,$$

o sea,

$$f^{-1}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f(\frac{n}{d})f^{-1}(d).$$

De este modo queda unívocamente determinado $f^{-1}(n)$ ya que conocemos los valores de $f^{-1}(d)$ para cada $d < n$. De lo anteror se sigue la existencia y unicidad de f^{-1} por inducción. ■

Nota 2.3.1 *Si f y g son funciones aritméticas distintas de cero en uno, entonces $f*g$ tampoco se anula en uno; este hecho, junto a los resultados de esta sección, prueban que el conjunto de las funciones aritméticas que no se anulan en uno forman un grupo abeliano con el producto de Dirichlet.*

Definición 2.3.2 *Una función aritmética no nula f se dice multiplicativa si $f(mn) = f(m)f(n)$ siempre que m y n sean primos relativos; y se dice completamente multiplicativa si $f(mn) = f(m)f(n)$ para cualquier par de enteros positivos m y n.*

Es un resultado conocido que el conjunto de las funciones multiplicativas forman un subgrupo del conjunto de funciones aritméticas que no se anulan en uno; para una prueba ver [APOS].

Por otra parte, si u denota la función aritmética que vale uno para cada entero positivo y N denota la función identidad, entonces si utilizamos la notación de Dirichlet podemos expresar las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3) y (2.5) como:

$$\mu * u = I, \tag{2.6}$$

$$\varphi * u = N, \tag{2.7}$$

$$\ln = \Lambda * u, \tag{2.8}$$

$$\tau = u * u. \tag{2.9}$$

Ahora, si f y g son funciones aritméticas con $f = g * u$, entonces por (2.6) se tiene que

$$g = (\mu * u) * g = \mu * (u * g) = \mu * f.$$

Este resultado es conocido como la fórmula de inversión de Möbius; más adelante probaremos una versión más general.

Teorema 2.3.2 *Si $n \geq 1$, tenemos*

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln(\frac{n}{d}) \tag{2.10}$$

y

$$\sum_{d|n} \mu(d) \tau(\frac{n}{d}) = 1. \tag{2.11}$$

Prueba. Multiplicando (2.8) y (2.9) por μ y utilizando (2.6), se tiene que

$$\ln *\mu = (\Lambda * u) * \mu = \Lambda * (u * \mu) = \Lambda * I = \Lambda$$

y

$$\mu * \tau = (u * u) * \mu = u * (u * \mu) = u * I = u.$$

Así queda probado el teorema. ■

Teorema 2.3.3 *Si f y g son funciones aritméticas, entonces*

$$\sum_{i \leq n} f(i) \sum_{d|i} g(d) = \sum_{d \leq n} g(d) \sum_{j \leq \frac{n}{d}} f(dj); \tag{2.12}$$

además, si f es completamente multiplicativa, ambas sumas son iguales a

$$\sum_{d \leq n} g(d) f(d) \sum_{j \leq \frac{n}{d}} f(j).$$

Prueba. La segunda parte del teorema es obvia, la primera se sigue de la siguiente cadena de igualdades

$$\sum_{i \leq n} f(i) \sum_{d|i} g(d) = \sum_{i \leq n} \sum_{d|i} f(i) g(d) = \sum_{ab \leq n} f(ab) g(b) = \sum_{b \leq n} g(b) \sum_{a \leq \frac{n}{b}} f(ab) = \sum_{d \leq n} g(d) \sum_{j \leq \frac{n}{d}} f(dj),$$

donde a y b recorren todos los enteros positivos cuyo producto es menor o igual a n. ■

Ahora vamos a introducir una noción más general del producto de Dirichlet que se definirá entre una función aritmética y una función con dominio en los reales positivos, lo cual será de gran ayuda para probar algunas de las equivalencias del teorema del número primo.

Definición 2.3.3 *Sea F una función con valores reales o complejos definida en los reales positivos, tal que $F(x) = 0$ para $0 < x < 1$ y sea α designa una función aritmética. Denotamos por $\alpha \circ F$ como la función definida en $(0, +\infty)$ que se anula en $0 < x < 1$, determinada para*

$x \geq 1$ *por*

$$(\alpha \circ F)(x) = \sum_{n \leq x} \alpha(n) F(\frac{x}{n}).$$

Ahora probaremos una version de asociatividad entre este nuevo producto y el producto de Dirichlet.

Teorema 2.3.4 *Para todo par de funciones aritméticas α y β, con F como se definió anteriormente, se tiene que*

$$\alpha \circ (\beta \circ F) = (\alpha * \beta) \circ F. \tag{2.13}$$

Prueba. *Para $x > 0$, tenemos*

$$\begin{aligned}
\{\alpha \circ (\beta \circ F)\}(x) &= \sum_{n \leq x} \alpha(n) \sum_{m \leq \frac{x}{n}} \beta(m) F(\frac{x}{nm}) = \sum_{nm \leq x} \alpha(n)\beta(m) F(\frac{x}{nm}) \\
&= \sum_{k \leq x} \left(\sum_{n|k} \alpha(n)\beta(\frac{k}{n}) \right) F(\frac{x}{k}) = \sum_{k \leq x} (\alpha * \beta)(k) F(\frac{x}{k}) \\
&= \{(\alpha * \beta) \circ F\}(x).
\end{aligned}$$

■

Observemos que la función identidad $I(n) = \left[\frac{1}{n}\right]$ para el producto de Dirichlet es también una identidad a la izquierda para para la operación $\circ$, ya que

$$(I \circ F)(x) = \sum_{n \leq x} \left[\frac{1}{n}\right] F(\frac{x}{n}) = F(x). \tag{2.14}$$

Ahora, usando este resultado y el teorema anterior, probaremos dos identidades que involucran la función de Mangolt y la función de Möbius.

Teorema 2.3.5 *Para $x > 0$, tenemos*

$$\sum_{n \leq x} [\frac{x}{n}] = \sum_{n \leq x} \tau(n) \tag{2.15}$$

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n \leq x} \ln n. \tag{2.16}$$

Prueba. *Si denotamos por H la función definida en $(0, +\infty)$ que vale cero para $0 < x < 1$, y* *vale uno para $x \geq 1$, usando las identidades* (2.8)*,* (2.9)*,* (2.14) *y el teorema anterior obtenemos*

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\tau(n) &= (\tau\circ H)(x) = \{(u*u)\circ H\}(x)\\ &= \{u\circ(u\circ H)\}(x) = \sum_{n\leq x}\left(\sum_{k\leq\frac{x}{n}}1\right) = \sum_{n\leq x}\left[\frac{x}{n}\right];\end{aligned}$$

luego, hemos probado 2.15. De otro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] &= \{\Lambda\circ(u\circ H)\}(x) = \{(\Lambda*u)\circ H\}(x)\\ &= \{\ln\circ H\}(x) = \sum_{n\leq x}\ln n;\end{aligned}$$

con lo que obtenemos (2.16)*.* ■

Teorema 2.3.6 (Fórmula de Möbius Generalizada) *Sean F y G funciones cuyo dominio son los reales positivos, definidas como cero en* $(0,1)$*. Supongamos que*

$$F(x) = \sum_{n\leq x} G(\frac{x}{n}). \tag{2.17}$$

Entonces

$$G(x) = \sum_{n\leq x}\mu(n)F(\frac{x}{n}). \tag{2.18}$$

Prueba. Para $0 < x < 1$, la suma de (2.18) no tiene ningún término ya que n recorre sólo los enteros positivos menores o iguales a x, en este caso definimos dicha suma como cero. Para $x \geq 1$, multiplicando (2.17) en la forma $F = u\circ G$ por μ y utilizando (2.1) junto con el teorema 2.3.4 obtenemos

$$\mu\circ F = \mu\circ(u\circ G) = (\mu*u)\circ G = I\circ G = G,$$

de lo que se sigue el teorema inmediatamente. ■

2.4 Fórmulas de sumación de Euler y Abel

En esta sección probaremos tres teoremas que nos permitirán expresar funciones de la forma $\sum_{n\leq x} f(n)$ en términos de funciones elementales más un error que se puede acotar para valores grandes de x.

Definición 2.4.1 *Si $g(x) > 0$ para todo $x > a$, escribimos $f(x) = O(g(x))$ para indicar que el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ se halla acotado para $x > a$, es decir, existe $M > 0$ tal que $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < M$ para todo $x > a$. Así, una ecuación de la forma $f(x) = h(x) + O(g(x))$ significará que $f(x) - h(x) = O(g(x))$. Observemos que $f(t) = O(g(t))$ para $t > a$, implica que $\int_a^x f(t)dt = O(\int_a^x g(t)dt)$.*

Definición 2.4.2 *La notación $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to \infty$ significa que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

De esta manera, una ecuación de la forma $f(x) = h(x) + o(g(x))$ cuando $x \to \infty$ significa que $f(x) - h(x) = o(g(x))$ cuando $x \to \infty$.

Definición 2.4.3 *Si*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

decimos que $f(x)$ es asintótica a $g(x)$ cuando $x \to \infty$, y escribimos $g(x) \sim f(x)$ cuando $x \to \infty$.

Teorema 2.4.1 (Sumación Parcial) *Sea t_1, $t_2, ...$ una sucesión creciente de números reales con límite infinito, sea $z_1, z_2, ...$ cualquier suseción de números complejos, además supongamos que f es una función compleja con derivada continua para valores del argumento mayores o iguales a t_1. Definamos la función Z como cero para $x < t_1$, y para $x \geq t_1$ por*

$$Z(x) = \sum_{t_n \leq x} z_n,$$

la suma de todos los z_n para los n que cumplen que $t_n \leq x$. Entonces

$$\sum_{t_n \leq x} z_n f(t_n) = Z(x)f(x) - \int_{t_1}^{x} Z(y)f'(y)dy.$$

Prueba. Como $Z(t_{n+1}) - Z(t_n) = z_{n+1}$, si m es el subindice más grande tal que $t_m \leq x$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{t_n \leq x} z_n f(t_n) &= Z(t_1)f(t_1) + (Z(t_2) - Z(t_1))f(t_2) + ... \\
&\quad +(Z(t_m) - Z(t_{m-1}))f(t_m) \\
&= Z(t_1)(f(t_1) - f(t_2)) + ... + Z(t_{m-1})(f(t_{m-1}) - f(t_m)) \\
&\quad +Z(t_m)(f(t_m) - f(x)) + Z(x)f(x),
\end{aligned}$$

dado que $Z(t_m) = Z(x)$. Ahora, como Z es constante en el intervalo $[t_i, t_{i+1})$, tenemos que

$$Z(t_i)(f(t_i) - f(t_{i+1})) = -\int_{t_i}^{t_{i+1}} Z(y)f'(y)dy.$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{t_n \leq x} z_n f(t_n) &= Z(x)f(x) - \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} + \int_{t_m}^{x} \right\} Z(y)f^{'}(y)dy \\
&= Z(x)f(x) - \int_{t_1}^{x} Z(y)f'(y)dy.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.4.2 (Fórmula de Sumación de Abel) *Para toda función aritmética $a(n)$, sea*

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n),$$

donde $A(x) = 0$ si $x < 1$. Sea además f una función con derivada continua en el intervalo $[y, x]$, para $0 < y < x$, entonces

$$\sum_{y < n \leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_{y}^{x} A(t)f^{'}(t). \tag{2.19}$$

Prueba. Basta hacer $z_n = a(n)$, $t_n = n$ y calcular

$$\sum_{n \leq x} a(n)f(n) - \sum_{n \leq y} a(n)f(n).$$

■

Nota 2.4.1 *Dado que $A(t) = 0$ si $t < 1$, entonces cuando $y < 1$, (2.19) toma la forma*

$$\sum_{n \leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_{1}^{x} A(t)f^{'}(t). \tag{2.20}$$

Teorema 2.4.3 (Fórmula de Sumación de Euler) *Sea f una función con derivada continua en el intervalo $[y, x]$, con $0 < y < x$ entonces*

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_{y}^{x} f(t)dt + \int_{y}^{x} (t - [t])f^{'}(t)dt + ([x] - x)f(x) - ([y] - y)f(y). \tag{2.21}$$

Prueba. Tomando $a(n) = 1$ para todo $n > 1$ en (2.19), y observando que $A(x) = [x]$, obtenemos

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = [x]f(x) - [y]f(y) - \int_y^x [t]f^{'}(t),$$

combinando esto con la siguiente fórmula de integración por partes

$$\int_y^x tf^{'}(t)dt = xf(x) - yf(y) - \int_y^x f(t)dt,$$

se tiene el teorema. ■

Teorema 2.4.4 *Para $x \geq 2$ tenemos*

$$\sum_{n\leq x} \ln n = x\ln x - x + O(\ln x). \tag{2.22}$$

Prueba. Haciendo $f(t) = \ln t$ en la fórmula de sumación de Euler obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} \ln n &= \int_1^x \ln t dt + \int_1^x \frac{t-[t]}{t}dt - (x-[x])\ln x \\
&= x\ln x - x + 1 + \int_1^x \frac{t-[t]}{t}dt + O(\ln x) \\
&= x\ln x - x + 1 + O\left(\int_1^x \frac{1}{t}dt\right) + O(\ln x) \\
&= x\ln x - x + O(\ln x).
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.4.5 *Para $x \geq 2$ tenemos*

$$\vartheta(x) = \pi(x)\ln(x) - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt \tag{2.23}$$

y

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\ln t^2}dt. \tag{2.24}$$

Prueba. Si $a(n)$ designa la función característica de los primos, entonces tenemos que

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1 = \sum_{1<n\leq x} a(n) \qquad y \qquad \vartheta(x) = \sum_{p\leq x} \ln p = \sum_{1<n\leq x} a(n)\ln n.$$

Haciendo $f(x) = \ln x$ en (2.19), con $y = 1$, resulta

$$\vartheta(x) = \sum_{1<n\leq x} a(n)\ln n = \pi(x)\ln(x) - \pi(1)\ln 1 - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t}dt = \pi(x)\ln(x) - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt,$$

que prueba (2.23). Ahora sea $b(n) = a(n)\ln n$, si hacemos $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ en (2.19), obtenemos

$$\pi(x) = \sum_{\frac{3}{2}<n\leq x} \frac{b(n)}{\ln n} = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} - \frac{\vartheta(\frac{3}{2})}{\ln\frac{3}{2}} + \int_{\frac{3}{2}}^x \frac{\vartheta(t)}{t\ln t^2}dt = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\ln t^2}dt,$$

ya que $\vartheta(x) = \sum_{n\leq x} b(n)$ y $\vartheta(t) = 0$ si $t < 2$. ■

Lema 2.4.6 *Si $x > 1$, tenemos*

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} = \ln x + C + O(\frac{1}{x}), \tag{2.25}$$

donde C es la constante de Euler definida por

$$C = \lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)).$$

Prueba. Tomamos $f(t) = \frac{1}{t}$ en la fórmula de sumación de Euler para obtener:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} &= \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{t-[t]}{t^2}dt + 1 - \frac{x-[x]}{x} = \ln x - \int_1^x \frac{t-[t]}{t^2}dt + 1 + O(\frac{1}{x}) \\ &= \ln x - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt + \int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt + 1 + O(\frac{1}{x}).\end{aligned}$$

Ahora, la integral impropia $\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt$ existe ya que se encuentra acotada por $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt$.

De otra parte

$$0 < \int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt \leq \int_x^\infty \frac{1}{t^2}dt = O(\frac{1}{x});$$

de esta manera obtenemos

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} = \ln x - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt + 1 + O(\frac{1}{x}). \tag{2.26}$$

Así, sólo nos falta ver que $C = 1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt$; pero haciendo $x \to \infty$ en (2.26), resulta

$$C = \lim_{x\to\infty}(\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} - \ln(x)) = 1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}dt.$$

$\blacksquare$

Definición 2.4.4 *Para $x > 0$ definimos*

$$M(x) := \sum_{n \le x} \mu(n), \qquad U(x) := \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n}, \qquad V(x) := \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)\ln(n)}{n}.$$

Teorema 2.4.7 *Para $x \to \infty$ tenemos*

$$U(x) = O(1) \tag{2.27}$$

$$(\ln x)U(x) = V(x) + O(1). \tag{2.28}$$

Prueba. Aplicando la fórmula generalizada de Möbius con $G(x) = 1$ para $x > 1$, vemos que $F(x) = [x]$, así, usando el resultado trivial $[x] = x + O(1)$, obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n \le x} \mu(n) F(\frac{x}{n}) = \sum_{n \le x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n \le x} \mu(n) \left(\frac{x}{n} + O(1)\right) \\ &= x \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} + O(\sum_{n \le x} 1) = xU(x) + O(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$U(x) = \frac{1 - O(x)}{x} = O(1).$$

De este modo probamos (2.27). De otra parte, tomando $G(x) = x$, para $x > 1$, en (2.3.6) y usando (2.4.6), tenemos

$$F(x) = \sum_{n \le x} \frac{x}{n} = x \ln x + Cx + O(1);$$

luego, en virtud de (2.3.6) y de (2.27), resulta

$$\begin{aligned} x &= G(x) = \sum_{n \le x} \mu(n) \left(\frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} + C\frac{x}{n} + O(1)\right) \\ &= x \ln x \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} - x \sum_{n \le x} \frac{\mu(n) \ln n}{n} + Cx \sum_{n \le x} \frac{\mu(n)}{n} + O(x) \\ &= x \ln x U(x) - xV(x) + xU(x) + O(x) = x \ln x U(x) - xV(x) + O(x), \end{aligned}$$

de este modo, dividiendo por x y organizando términos, obtenemos (2.28). $\blacksquare$

Teorema 2.4.8 (Dirichlet) *Para las sumas parciales de $\tau(n)$ se tiene*

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + (2C - 1)x + O(x^{\frac{1}{2}}), \tag{2.29}$$

donde C es la constante de Euler.

Prueba. Observemos que

$$T(x) := \sum_{n \leq x} \tau(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{ab=n} 1 = \sum_{ab \leq x} 1.$$

Así, $T(x)$ cuenta el número de puntos (a, b), con coordenadas enteras positivas, bajo la hiperbola $ab = x$. Tales puntos satisfacen $a \leq \sqrt{x}$ ó $b \leq \sqrt{x}$; de este modo $T(x) = T_1 + T_2 - T_3$, donde

$$\begin{aligned} T_1 &= \left|\{(a, b) : a \leq \sqrt{x},\, ab \leq x\}\right| \\ T_2 &= \left|\{(a, b) : b \leq \sqrt{x},\, ab \leq x\}\right| \\ T_3 &= \left|\{(a, b) : b \leq \sqrt{x},\, a \leq \sqrt{x},\, ab \leq x\}\right|. \end{aligned}$$

Ahora $T_3 = [\sqrt{x}]^2 = x + O(\sqrt{x})$, ya que para $x > 0$ se tiene $0 \leq x - [\sqrt{x}]^2 = (\sqrt{x})^2 - [\sqrt{x}]^2 = \{\sqrt{x} - [\sqrt{x}]\}\{\sqrt{x} + [\sqrt{x}]\} \leq 1\{\sqrt{x} + [\sqrt{x}]\} \leq 2\sqrt{x}$.

Poa otro lado,usando un lema anterior, tenemos

$$T_1 = T_2 = \sum_{a \leq \sqrt{x}} \sum_{b \leq \frac{x}{a}} 1 = \sum_{a \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{a}\right] = x \sum_{a \leq \sqrt{x}} \frac{1}{a} + O(\sqrt{x}) =$$

$$x\{\ln(x^{\frac{1}{2}}) + C + O(x^{-\frac{1}{2}})\} + O(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} x \ln(x) + xC + O(\sqrt{x}),$$

luego,

$$T(x) = 2\{\frac{1}{2} x \ln(x) + xC + O(\sqrt{x})\} - \{x + O(\sqrt{x})\} = x \ln x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}).$$

■

Capítulo 3

Equivalencias del Teorema del Número Primo

En este capítulo probaremos varias equivalencias del teorema del número primo, expresadas en términos de las sumas parciales de las funciones aritméticas μ, Λ y de las funciones ϑ y ψ. Dichas equivalencias nos permitirán tener una mejor comprensión del teorema y nos brindarán varios puntos de vista para abordarlo. Una característica especial de las equivalencias es el hecho de que sus pruebas son todas de caracter elemental y no utilizan nada más allá de técnicas básicas de cálculo.

Teorema 3.0.9 *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

$$\begin{aligned}
\pi(x) &\sim \frac{x}{\ln x}, && (3.1)\\
\vartheta(x) &\sim x, && (3.2)\\
\psi(x) &\sim x, && (3.3)\\
\pi(x) &\sim \frac{x}{\ln \pi(x)}, && (3.4)\\
p_n &\sim n \ln n, \ \textit{donde } p_n \textit{ es el } n-\textit{ésimo primo,} && (3.5)\\
M(x) &= o(x), && (3.6)\\
U(x) &= o(1), && (3.7)\\
V(x) &= o(\ln x), && (3.8)\\
\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} &= \ln x + c_1 + o(1), && (3.9)\\
\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} &= \ln x + c_2 + o(1), && (3.10)\\
\int_1^{\infty} \frac{\vartheta(x) - x}{x^2} dx &< +\infty. && (3.11)
\end{aligned}$$

Prueba. [(3.1) $\Leftrightarrow$ (3.2)]
De (2.4.5) obtenemos

$$\vartheta(x) = \pi(x) \ln(x) - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt$$

y

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln t^2} dt.$$

Así, para probar que (3.1) implica (3.2), solamente necesitamos mostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt = 0, \tag{3.12}$$

pero (3.1) implica que $\frac{\pi(t)}{t} = O(\frac{1}{\ln t})$, para $t \geq 2$; o sea,

$$\frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} = O(\frac{1}{x} \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt). \tag{3.13}$$

Además,

$$\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\ln t} dt + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{\ln t} dt \leq \frac{\sqrt{x}}{\ln 2} + \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x};$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = 0,$$

y por (3.13) obtenemos (3.12), con lo cual se demuestra que (3.1) implica (3.2).

Por otra parte, para demostrar que (3.2) implica (3.1), solo necesitamos ver que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} dt = 0. \tag{3.14}$$

Tenemos que (3.2), implica $\vartheta(t) = O(x)$, luego

$$\frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} dt = O(\frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} dt); \tag{3.15}$$

además,

$$\int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} dt = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\ln^2 t} dt + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{\ln^2 t} dt \leq \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x} + \frac{x - \sqrt{x}}{\ln^2 x},$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} dt = 0.$$

De este modo, por (3.15), obtenemos (3.14) y así queda demostrado que (3.2) implica (3.1). ∎

[(3.2) ⇔ (3.3)]

Prueba. Es suficiente probar que para $x > 0$ se tiene que

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\Lambda(x)}{x} \leq \frac{\ln^2 x}{2\sqrt{x} \ln 2}, \tag{3.16}$$

ya que esta desigualdad implica

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\psi(x)}{x}-\frac{\Lambda(x)}{x}\right)=0.$$

Ahora, puesto que $\Lambda(n)=0$, excepto si n es una potencia de un primo, podemos escribir a $\psi(x)$ como sigue:

$$\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)=\sum_{\substack{m=1\\ p^m\leq x}}^{\infty}\sum_{p}\Lambda(p^m)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p\leq x^{1/m}}\ln p.$$

Dado que p varía sobre los primos, la suma extendida a p es vacía para $x^{\frac{1}{m}}<2$, o sea, para $m>\frac{\ln x}{\ln 2}=\log_2 x$. Así, la suma extendida a m es, en realidad,una suma finita, por consiguiente tenemos

$$\psi(x)=\sum_{m\leq\log_2 x}\sum_{p\leq x^{1/m}}\ln p.$$

De donde se sigue, utilizando la definición de $\vartheta(x)$, que

$$0\leq\psi(x)-\vartheta(x)\leq\sum_{2\leq m\leq\log_2 x}\vartheta(x^{1/m});$$

además, para $\vartheta(x)$ se tiene la desigualdad obvia

$$\vartheta(x)\leq\sum_{p\leq x}\ln x\leq x\ln x,$$

luego,

$$\begin{aligned}0 &\leq \psi(x)-\vartheta(x)\leq\sum_{2\leq m\leq\log_2 x}x^{1/m}\ln(x^{1/m})\leq(\log_2 x)\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\\ &= \frac{\ln x}{\ln 2}\frac{\sqrt{x}}{2}\ln x=\frac{\sqrt{x}(\ln x)^2}{2\ln 2}.\end{aligned}$$

Así, dividiendo por x obtenemos (3.16). ■

[(3.1) $\Leftrightarrow$ (3.4) $\Leftrightarrow$ (3.5)]

Prueba. Primero veamos que (3.1) implica (3.4). En efecto, (3.1) implica

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\pi(x)+\ln(\ln x)-\ln x\right]=0,$$

luego,

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln x\left(\frac{\ln\pi(x)}{\ln x}+\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}-1\right)\right]=0.$$

Dado que
$$\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty,$$
tenemos
$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln \pi(x)}{\ln x} + \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} - 1\right] = 0,$$
de donde obtenemos
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln \pi(x)}{\ln x} = 1.$$
Así,
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln \pi(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln(x)}{x}\frac{\ln \pi(x)}{\ln x}\\ &= \left(\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln \pi(x)}{\ln x}\right) = 1.\end{aligned}$$

Veamos ahora que (3.4) implica (3.5). Si $x = p_n$, entonces $\pi(x) = n$, por lo tanto de (3.4) obtenemos
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{p_n} = 1;$$
de este modo concluimos (3.5).

Ahora, supongamos que se tiene (3.5). Dado $x > 1$, definimos n por medio de las desigualdades
$$p_n \leq x < p_{n+1},$$
de donde $n = \pi(x)$. Dividiendo por $n \ln n$ tenemos
$$\frac{p_n}{n\ln n} \leq \frac{x}{n\ln n} \leq \frac{p_{n+1}}{n\ln n} = \frac{p_{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n};$$
haciendo $x\to\infty$ y usando (3.5), obtenemos
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{n\ln n} = 1,$$
o sea,
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\pi(x)\ln \pi(x)} = 1.$$
Así, obtenemos (3.4).

Finalmente supongamos (3.4). Tomando logaritmos obtenemos
$$\lim_{x\to\infty}[\ln \pi(x) + \ln(\ln \pi(x)) - \ln x] = 0,$$

luego,

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\pi(x)\left(1+\frac{\ln(\ln\pi(x))}{\ln\pi(x)}-\frac{\ln x}{\ln\pi(x)}\right)\right]=0.$$

Dado que $\ln\pi(x)\to\infty$ cuando $x\to\infty$,concluimos que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln(\ln\pi(x))}{\ln\pi(x)}-\frac{\ln x}{\ln\pi(x)}\right)=0,$$

lo cual implica

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln\pi(x)}=1;$$

esto combinado con (3.4) nos da (3.1). ■

[(3.3) $\Leftrightarrow$ (3.6) $\Leftrightarrow$ (3.7) $\Leftrightarrow$ (3.8)]

Prueba. Veremos (3.7) $\Rightarrow$ (3.6) $\Rightarrow$ (3.3) $\Rightarrow$ (3.8) $\Rightarrow$ (3.7) .

[(3.7) $\Rightarrow$ 3.6] De la formula de sumación de Abel, obtenemos

$$\begin{aligned} M(x) &= \sum_{n\leq x}\mu(n)=\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n}n=xU(x)-\frac{1}{2}U\left(\frac{1}{2}\right)-\int_{\frac{1}{2}}^{x}U(t)dt \\ &= xU(x)-\int_{\frac{1}{2}}^{x}U(t)dt=o(x)-\int_{\frac{1}{2}}^{x}o(1)dt=o(x). \end{aligned}$$

[(3.6) $\Rightarrow$ (3.3)]

Primero vamos a construir una función aritmética f, tal que

$$\psi(x)-x=\sum_{qd\leq x}\mu(p)f(q)+O(1),$$

para luego usar (3.6) y mostrar que el lado derecho es $o(x)$, cuando $x\to\infty$.

Para construir dicha función usaremos las identidades

$$\Lambda(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\ln(\frac{n}{d}),\qquad \sum_{d|n}\mu(d)\tau(\frac{n}{d})=1,\quad \text{y}\quad \sum_{d|n}\mu(n)=\left[\frac{1}{n}\right];$$

que son resultado de los teoremas 2.2.1 y 2.3.2. Usando estas ecuaciones obtenemos, para cualquier constante Ω y para $x\geq 1$, lo siguiente:

$$\psi(x)-[x]+\Omega=\sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\mu(d)\left(\ln\frac{n}{d}-\tau\left(\frac{n}{d}\right)+\Omega\right)=\sum_{qd\leq x}\mu(d)\left(\ln q-\tau\left(q\right)+\Omega\right). \qquad (3.17)$$

De este modo, podemos definir, para cada constante Ω, $f(n)=\ln n-\tau(n)+\Omega$.

Ahora es conveniente escoger a Ω de tal modo que las sumas parciales de f sean pequeñas. Por los teoremas 2.4.4 y 2.4.8, si escojemos $\Omega=2C$ y definimos a f con dicha constante, entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} F(x) \quad : \quad &= \sum_{n\le x} f(n) = \sum_{n\le x} (\ln n - \tau(n) + 2C) = \sum_{n\le x} \ln n - \sum_{n\le x} \tau(n) + \sum_{n\le x} 2C \\ &= x\ln x - x + O(\ln x) - \Big(x\ln x + (2C-1)x + O(x^{\frac{1}{2}})\Big) + \{x + O(1)\}2C \\ &= O(\ln x) + O(x^{\frac{1}{2}}) + O(1) = O(x^{\frac{1}{2}}) \le B\sqrt{x}, \end{aligned}$$

para alguna constante B y para $x \ge b$, con un cierto $b > 0$.

Ahora, vamos a probar que

$$\sum_{qd\le x} \mu(p) f(q) = o(x). \tag{3.18}$$

Dado un $\epsilon > 0$,sean $a, b \ge 1$ con $ab = x$, donde a y b serán especificados más adelante. El lado izquierdo de la última igualdad se puede reescribir así:

$$\sum_{qd\le x} \mu(p) f(q) = \sum_{n\le a} \mu(n) F(\frac{x}{n}) + \sum_{n\le b} f(n) M(\frac{x}{n}) - M(a)F(b), \tag{3.19}$$

ya que cada q y d enteros positivos tales que $qd \le x$, satisfacen que $q \le x$ ó $d \le x$, y estan contados en la primera o segunda de las sumatorias del lado derecho; aquellos que satisfacen ambas desigualdades estan contados en ambas sumatorias y por lo tanto se sustraen una vez en el termino $M(a)F(b)$.

La primera suma del lado derecho de (3.19), esta acotada en valor absoluto por

$$B\sum_{n\le a} \sqrt{\frac{x}{n}} = B\sqrt{x} \sum_{n\le a} \frac{1}{\sqrt{n}} \le B\sqrt{x}\left(1 + \int_1^a \frac{dt}{\sqrt{t}}\right) \le 2B\sqrt{a}\sqrt{x} = 2B\frac{x}{\sqrt{b}}.$$

Fijemos $b = b(\epsilon) > 1$, suficientemente grande tal que

$$\frac{2B}{\sqrt{b}} < \epsilon. \tag{3.20}$$

Así, tenemos

$$\left| \sum_{n\le a} \mu(n) F(\frac{x}{n}) \right| < \epsilon x.$$

Para estimar el segundo término del lado derecho de (3.19), usando (3.6) escogemos $c = c(\epsilon, K)$ suficientemente grande, tal que si $\frac{x}{n} > c$, entonces $\left|M(\frac{x}{n})\right| < \left(\frac{\epsilon}{K}\right)\frac{x}{n}$, donde K es una constante que se definirá enseguida. Luego, si $x > bc$, entonces $\frac{x}{n} > c$ para cada $n \leq b$; así tenemos que

$$\left|\sum_{n\leq b} f(n)M(\frac{x}{n})\right| \leq \frac{\epsilon x}{K}\sum_{n\leq b}\frac{|f(n)|}{n}.$$

De este modo, tomando $K = \sum_{n\leq b}\frac{|f(n)|}{n}$, concluimos que

$$\left|\sum_{n\leq b} f(n)M(\frac{x}{n})\right| \leq \epsilon x,$$

donde c solo depende de ϵ.

Para el tercer término, usando el hecho de que $M(a) = M(\frac{x}{b}) \leq \frac{x}{b} = a$ y (3.20), notamos que

$$|M(a)F(b)| \leq a(B\sqrt{b}) \leq ab\frac{B}{\sqrt{b}} < \epsilon x.$$

De lo anterior obtenemos

$$\left|\sum_{qd\leq x}\mu(p)f(q)\right| \leq 3\epsilon x,$$

para $x > bc$, donde b y c dependen sólo de ϵ. Dado que $\epsilon > 0$ fue arbitrario, concluimos que

$$\psi(x) - x = o(x),$$

así,

$$\frac{\psi(x)}{x} - 1 = o(1),$$

o sea,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} = 1;$$

de este modo obtenemos (3.3).

[(3.3) $\Rightarrow$ (3.8)]

De los teoremas 2.2.1 y 2.3.2, obtenemos

$$\begin{aligned}\Lambda(n) &= \sum_{d|n}\mu(d)\ln(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n}\mu(d)\{\ln n - \ln d\}\\ &= \ln n\sum_{d|n}\mu(d) - \sum_{d|n}\mu(d)\ln d = -\sum_{d|n}\mu(d)\ln d.\end{aligned}$$

Así, utilizando la fórmula de inversión de Möbius, concluímos

$$\mu(n)\ln n = -\sum_{d|n} \Lambda(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

luego,

$$V(x) = \sum_{n\le x} \frac{\mu(n)\ln n}{n} = -\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\sum_{d|n}\Lambda(d)\mu(\frac{n}{d}) = -\sum_{dq\le x}\frac{\Lambda(d)}{d}\frac{\mu(q)}{q} = -\sum_{d\le x}\frac{\Lambda(d)}{d}U\left(\frac{x}{d}\right),$$

Ahora escribimos $\psi(x) = x + R(x)$, donde $R(x) = o(x)$, ya que de la hipótesis tenemos que $\psi(x) \sim x$, o lo que es equivalente, $\psi(x) = x + o(x)$. De esta manera escribimos la última suma como:

$$\sum_{d\le x}\frac{\psi(d)-\psi(d-1)}{d}U(\frac{x}{d}) = \sum_{d\le x}\frac{1}{d}U(\frac{x}{d}) + \sum_{n\le x}\frac{R(d)-R(d-1)}{d}U(\frac{x}{d}).$$

La primera de estas sumas, para $x > 1$, se puede evaluar explícitamente:

$$\sum_{d\le x}\frac{1}{d}\sum_{q\le \frac{x}{d}}\frac{\mu(q)}{q} = \sum_{qd\le x}\frac{\mu(d)}{qd} = \sum_{n\le x}\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d) = 1 = o(\ln x).$$

Para la segunda, usando un argumento análogo al de la prueba de sumación parcial, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{d\le x}\frac{R(d)-R(d-1)}{d}U(\frac{x}{d}) &= \frac{R([x])}{[x]} + \sum_{d\le x-1}\frac{R(d)}{d}U(\frac{x}{d}) - \sum_{d\le x-1}U(\frac{x}{d})\frac{R(d-1)}{d} \\
&\quad - U(\frac{x}{[x]})\frac{R([x]-1)}{[x]} \\
&= \frac{R([x])}{[x]} + \sum_{d\le x-1}\frac{R(d)}{d}U(\frac{x}{d}) - \sum_{d\le x}U(\frac{x}{d})\frac{R(d-1)}{d} \\
&= \frac{R([x])}{[x]} + \sum_{d\le x-1}\frac{R(d)}{d}U(\frac{x}{d}) - \sum_{d\le x-1}U(\frac{x}{d+1})\frac{R(d)}{d+1} \\
&= \frac{R([x])}{[x]} + \sum_{d\le x-1}\frac{R(d)}{d}U(\frac{x}{d}) - \sum_{d\le x-1}U(\frac{x}{d+1})R(d)(\frac{1}{d} - \frac{1}{d(d+1)}) \\
&= \frac{R([x])}{[x]} + \sum_{d\le x-1}\frac{R(d)}{d}(\ U(\frac{x}{d}) - U(\frac{x}{d+1})\ ) \\
&\quad + \sum_{d\le x-1}\frac{R(d)}{d(d+1)}U(\frac{x}{d+1}).
\end{aligned}$$

El primer término de la última expresión es $o(1)$. Recordando que $U(x) = O(1)$, podemos acotar el tercer termino de dicha expresión por una constante no nula que multiplica a

$$\sum_{d\leq x-1} \frac{R(d)}{d(d+1)} = \sum_{d\leq x-1} \frac{o(d)}{d(d+1)} = \sum_{d\leq x-1} o\left(\frac{1}{d+1}\right) = o(\ln x).$$

Ahora, la mayor dificultad consiste en establecer que el segundo término es $o(\ln x)$.

Esta suma está acotada, en valor absoluto, por

$$\sum_{d\leq x-1} \frac{|R(d)|}{d} \sum_{\frac{x}{(d+1)}<n\leq \frac{x}{d}} \frac{1}{n}, \tag{3.21}$$

así, para obtener el teorema, es suficiente mostrar que (3.21) es $o(\ln x)$.

Dado $\epsilon > 0$, escojamos un entero positivo w suficientemente grande tal que $\frac{|R(d)|}{d} < \epsilon$, para $d > w$. Partimos la suma de (3.21) en w y estimamos las dos partes. Sea $B = B(\epsilon)$ una cota superior para $\frac{|R(d)|}{d}$, con $d \leq w$, entonces podemos estimar (3.21) como sigue:

$$\begin{aligned}
\sum_{d\leq x-1} \frac{|R(d)|}{d} \sum_{\frac{x}{(d+1)}<n\leq \frac{x}{d}} \frac{1}{n} &\leq \sum_{d\leq w} B \sum_{\frac{x}{(d+1)}<n\leq \frac{x}{d}} \frac{1}{n} + \sum_{w<d\leq x-1} \frac{|R(d)|}{d} \sum_{\frac{x}{(d+1)}<n\leq \frac{x}{d}} \frac{1}{n} \\
&\leq B \sum_{\frac{x}{w+1}<n\leq x} \frac{1}{n} + \epsilon \sum_{w<d\leq x-1} \sum_{\frac{x}{(d+1)}<n\leq \frac{x}{d}} \frac{1}{n} \\
&\leq B(\ln w + 1) + \epsilon \sum_{\frac{x}{[x]}<n\leq \frac{x}{w}} \frac{1}{n} \\
&\leq \epsilon \ln x + \epsilon(\ln \frac{x}{w} + 1) \leq \epsilon \ln x + 2\epsilon \ln x = 3\epsilon \ln x,
\end{aligned}$$

para x suficientemente grande. Ahora, como ϵ es arbitrario, el teorema se sigue.

[(3.8) $\Rightarrow$ (3.7)]

Por el teorema 2.4.7 tenemos:

$$U(x) = \frac{V(x)}{\ln x} + O(\frac{1}{\ln x}) = o(1) + O(\frac{1}{\ln x}) = o(1),$$

así, obtenemos (3.7). ■

[(3.3) $\Leftrightarrow$ (3.9)]

Prueba. Primero veamos que tener (3.9) es equivalente a probar que para algun R

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n}. \tag{3.22}$$

En efecto, supongamos que se tiene (3.22), entonces,

$$\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)-1}{n}-R=o(1),$$

así, usando el lema 2.4.6, obtenemos

$$\begin{aligned} o(1) &= \sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}-R \\ &= \sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\{\ln x+C+O(\frac{1}{x})\}-R \\ &= \sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\ln x+c_1+o(1), \end{aligned}$$

con $c_1=C-R$. De este modo obtenemos (3.9). Ahora, supongamos que tenemos (3.9), así usando el lema 2.4.6, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}-c_1 &= \ln x+o(1)=\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}-C+O(\frac{1}{x})+o(1) \\ &= \sum_{n\leq x}\frac{1}{n}-C+o(1), \end{aligned}$$

luego, haciendo $L=C-c_1$, concluímos que

$$\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)-1}{n}-L=o(1),$$

con lo que obtenemos el resultado.

[(3.9) $\Rightarrow$ (3.3)]

Sea

$$P(x)=\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)-1}{n}.$$

De (3.9) y Sumación parcial se sigue que

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n)-1=\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)-1}{n}n=P(x)x-\int_1^x P(y)dy,$$

pero por lo anterior tenemos que (3.9) implica $P(x) = R + o(1)$; así, obtenemos

$$\begin{aligned} P(x)x - \int_1^x P(y)dy &= (R + o(1))\, x - \int_1^x (R + o(1))\, dy \\ &= Rx + o(x) - Rx + R - \int_1^x o(1)dy \\ &= o(x) - \int_1^x o(1)dy. \end{aligned}$$

Además, si $h(x) = o(1)$, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $x_o > 2$ tal que si $x > x_o$ se tiene que $|h(x)| < \epsilon$. Luego, para $x > x_o$, tenemos que

$$\left| \frac{\int_1^x h(x)dy}{x} \right| \leq \frac{\int_1^x |h(x)|\, dy}{x} \leq \frac{\int_1^x \epsilon dy}{x} = \frac{\epsilon(x-1)}{x} < \epsilon;$$

así, $\int_1^x h(x)dy = o(x)$; por lo tanto, de la cadena de igualdades anterior, concluímos que

$$\psi(x) - [x] = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) - \sum_{n \leq x} 1 = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) - 1 = o(x);$$

de este modo se sigue inmediatamente (3.3).

[(3.3) $\Rightarrow$ (3.9)]

Para demostrar (3.9) veremos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)-1}{n} = -2C$, con C la constante de Euler. Veamos primero que para obtener dicho resultado, es suficiente probar que

$$W(x) = \sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1)(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right]) = o(x). \tag{3.23}$$

En efecto, supongamos (3.23). Usando los teoremas 2.3.5, 2.4.4 y 2.4.8, obtenemos

$$\begin{aligned} o(x) &= \sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1)(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right]) \\ &= x \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n}\right] - x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} + \sum_{n \leq x} \left[\frac{x}{n}\right] \\ &= x \cdot (\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}) + \sum_{n \leq x} \tau(n) - \sum_{n \leq x} \ln n \\ &= x \cdot (\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n) - 1}{n}) + x \ln x + (2C - 1)x + O(x^{\frac{1}{2}}) - x \ln x + x - O(\ln x) \\ &= x \cdot (\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n) - 1}{n}) + 2Cx + o(x), \end{aligned}$$

de esta manera concluímos que

$$\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)-1}{n}+2C=o(1),$$

lo cual implica que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)-1}{n}=-2C$.

Ahora, veamos (3.23). Fijemos $\epsilon_o>0$ y escojamos $N>0$ grande, tal que $\frac{3}{N}<\frac{\epsilon_o}{2}$. Separemos la suma $W(x)$ en dos partes:

$$W(x)=\sum_{n\leq\frac{x}{N}}(\Lambda(n)-1)(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right])+\sum_{\frac{x}{N}<n\leq x}(\Lambda(n)-1)(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]).$$

La primera parte la podemos acotar, para x suficientemente grande, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\leq\frac{x}{N}}(\Lambda(n)-1)(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right])\right| &\leq \sum_{n\leq\frac{x}{N}}|\Lambda(n)-1|\left|\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]\right|\\ &\leq \sum_{n\leq\frac{x}{N}}|\Lambda(n)-1|\leq\sum_{n\leq\frac{x}{N}}(\Lambda(n)+1)\\ &= \psi(\frac{x}{N})+\left[\frac{x}{N}\right]\leq 2\frac{x}{N}+\frac{x}{N}=3\frac{x}{N},\end{aligned}$$

ya que $\psi(x)\sim x$ por hipótesis. De otro lado, para acotar la segunda parte, notemos que $\frac{x}{N}<n\leq x$ si y solo si $1\leq\frac{x}{n}<N$, con lo que obtenemos

$$\sum_{\frac{x}{N}<n\leq x}(\Lambda(n)-1)(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right])=x\sum_{\frac{x}{N}<n\leq x}\frac{(\Lambda(n)-1)}{n}-\sum_{1\leq k<N}k\sum_{\frac{x}{k-1}<n\leq\frac{x}{k}}(\Lambda(n)-1). \tag{3.24}$$

Así, usando sumación parcial y (3.3), en la versión $Q(x)=\sum_{n\leq x}(\Lambda(n)-1)=o(x)$, se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{\frac{x}{N}<n\leq x}(\Lambda(n)-1)\frac{1}{n} &= \frac{Q(x)}{x}-\frac{Q(\frac{x}{N})}{(\frac{x}{N})}+\int_{\frac{x}{N}}^{x}\frac{Q(y)}{y^2}dy\\ &= o(1)+\int_{\frac{x}{N}}^{x}\frac{Q(y)}{y^2}dy.\end{aligned}$$

Ahora, dado $\epsilon>0$, como $Q(x)=o(x)$, se tiene que $\left|\frac{Q(y)}{y}\right|<\epsilon$, para $x\geq x_o$; así,

$$\left|\int_{\frac{x}{N}}^{x}\frac{Q(y)}{y^2}dy\right|\leq\int_{\frac{x}{N}}^{x}\left|\frac{Q(y)}{y}\right|\frac{1}{y}dy<\epsilon\int_{\frac{x}{N}}^{x}ydy=\epsilon(\ln x-\ln x+\ln N)=\epsilon\ln N,$$

para $x \geq x_o$, luego

$$\int_{\frac{x}{N}}^{x} \frac{Q(y)}{y^2} dy = o(1),$$

De este modo,

$$x \sum_{\frac{x}{N} < n \leq x} (\Lambda(n) - 1)\frac{1}{n} = o(x).$$

La doble sumatoria que aparece en (3.24), dado que N es fijo, es una combinación lineal de funciones de la forma $Q(\frac{x}{j})$ con $j \leq N$, y así tambien resulta ser $o(x)$.Por lo tanto, hemos probado que para $x \geq x_o$, se tiene que

$$W(x) \leq \frac{3x}{N} + o(x) + o(x),$$

lo cual implica

$$\frac{W(x)}{x} \leq \frac{3}{N} + o(1);$$

luego, para $x > x_1$, con x_1 suficientemente grande, tenemos que

$$\frac{W(x)}{x} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

De lo anterior concluímos que $W(x) = o(x)$ y, por consiguiente, (3.9). ■

[(3.9) ⇔ (3.10)]

Prueba. Para ver esta equivalencia, claramente basta probar que

$$K(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} + d_1 = o(1), \tag{3.25}$$

donde d_1 es una constante. Pero

$$\begin{aligned} K(x) &= \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} = \sum_{p \leq x} \sum_{m=2}^{\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]} \frac{\ln p}{p^m} < \sum_{p \leq x} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\ln p}{p^m} < \sum_{2 < n \leq x} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^m} \\ &= \sum_{2 < n \leq x} \frac{\ln n}{n^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n^m} = \sum_{2 < n \leq x} \frac{\ln n}{n^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right) = \sum_{2 < n \leq x} \frac{\ln n}{n(n-1)} \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n(n-1)}, \end{aligned}$$

además, es claro que la última serie converge. Dado que $K(x)$ es creciente, concluimos que

$$\lim_{x \to \infty} K(x) < +\infty,$$

así, se sigue inmediatamente (3.25). ■

[(3.10) ⇔ (3.11)]

Prueba. (3.10) $\Rightarrow$ (3.11)

Por sumación parcial obtenemos:

$$\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{p}=\frac{\vartheta(x)}{x}+\int_1^x\frac{\vartheta(y)}{y^2}dy,$$

combinando esto con (3.10), resulta:

$$\ln x+c_2+o(1)=\frac{\vartheta(x)}{x}+\int_1^x\frac{\vartheta(y)}{y^2}dy;$$

o sea,

$$\int_1^x\frac{\vartheta(y)-y}{y^2}dy=\int_1^x\frac{\vartheta(y)}{y^2}dy-\int_1^x\frac{1}{y}dy=\int_1^x\frac{\vartheta(y)}{y^2}dy-\ln x=c_2-\frac{\vartheta(x)}{x}+o(1),\qquad(3.26)$$

pero dado que (3.10) es equivalente a $\vartheta(x)\sim x$, si hacemos que x tienda a infinito en (3.26), vemos que el lado derecho converge, obteniendo el resultado.

(3.11) $\Rightarrow$ (3.10)

Dado que (3.10) es equivalente a (3.2), supondremos (3.11) y veremos (3.2).

Primero notemos que (3.2) es lógicamente equivalente al siguiente par de enunciados:

dado $\lambda>1$, el conjunto de x tales que $\vartheta(x)\geq\lambda x$ es acotado;

dado $0<\lambda<1$, el conjunto de x tales que $\vartheta(x)\leq\lambda x$ es acotado.

Probemos el primero. Supongamos que es falso, luego existe $\lambda>1$ tal que para x arbitrariamente grande, tenemos que $\vartheta(x)\geq\lambda x$. Dado que ϑ es monotona creciente, obtenemos para tales x lo siguiente:

$$\int_x^{\lambda x}\frac{\vartheta(y)-y}{y^2}dy\geq\int_x^{\lambda x}\frac{\lambda x-y}{y^2}dy=\int_1^{\lambda}\frac{\lambda-y}{y^2}dy>0.$$

El número a la derecha es independiente de x. Como existen x arbitrariamente grandes que satisfacen dicha desigualdad, concluímos que la integral de (3.11) no converge, lo cual es absurdo; así probamos el primer enunciado. El segundo enunciado se prueba de manera análoga. De lo anterior se sigue (3.10). ∎

Capítulo 4

El Teorema del Número Primo

En este capítulo presentaremos una prueba relativamente sencilla del teorema del número primo debida a D. J. Newman ver [NEWM] que sólo requiere de algunos resultados básicos de variable compleja, enunciados de antemano en los preliminares.

Antes de demostrar el resultado principal, probaremos algunas propiedades básicas de la funcion Zeta, la cual juega un papel crucial en todas las pruebas analíticas que se conocen del teorema del número primo.

4.1 Propiedades básicas de la función Zeta

Sea s una variable compleja. Para $\mathrm{Re}(s) > 1$ la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge absolutamente y uniformemente para $\mathrm{Re}(s) > 1 + \delta$, con $\delta > 0$, ya que

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

y entonces se aplica el criterio M de Weierstrass, ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ es converge. Además, la función $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$ es analítica en $\mathrm{Re}(s) > 1$, para cada N en los enteros positivos, se sigue inmediatamente que $\zeta(s)$ es analítica para $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Lema 4.1.1 *Para* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *se tiene*

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \tag{4.1}$$

donde p recorre los números primos.

Prueba. La convergencia del producto es una consecuencia inmediata de la definición 1.0.1, el teorema 1.0.2 y el mismo estimativo dado arriba para la función Zeta. En la misma región

$\text{Re}(s) > 1 + \delta$, podemos usar el estimativo de las series geométricas para concluir que

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + ... = E_p(s);$$

ahora, usando el teorema fundamental del álgebra, concluimos que en el producto de los términos $E_p(s)$ para todos los primos p, la expresíon $\frac{1}{n^s}$ aparece exactamente una sola vez, así:

$$\begin{aligned} \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + ...\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... = \zeta(s) \end{aligned}$$

para $\text{Re}(s) > 1$. ■

Corolario 4.1.2 $\zeta(s) \neq 0$ *para* $\text{Re}(s) > 1$

Prueba. Se sigue inmediatamente de la definición 1.0.1 y de la representación de la función Zeta como un producto. ■

Un paso crucial en la demostración del teorema del número primo es definir una continuación meromorfa de la función Zeta en la región $\text{Re}(s) > 0$, para luego estudiar los ceros y polos de dicha función. Antes de definir esta extensión tenemos el siguiente lema:

Lema 4.1.3 • *Si* $\text{Re}(s) > 1$ *entonces*

$$\int_1^\infty x^{-s} dx = \frac{1}{1-s}. \tag{4.2}$$

• Si $\text{Re}(s) > 0$ *y* $n \in N$, *entonces*

$$\int_n^x \frac{s}{u^{s+1}} du = \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}. \tag{4.3}$$

Prueba. Ambas partes del lema se siguen inmediatamente del teorema 1.0.1. ■

Lema 4.1.4 *La función* $\zeta(s) - \frac{1}{1-s}$, *inicialmente definida en* $\text{Re}(s) > 1$, *se puede extender a una función analítica en el semiplano* $\text{Re}(s) > 0$.

Prueba. Para $\text{Re}(s) > 1$ podemos usar el lema anterior y obtener

$$\zeta(s) - \frac{1}{1-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^\infty x^{-s} dx. \tag{4.4}$$

Podemos reescribir la integral de (4.4) como una suma de integrales desde un entero hasta el siguiente, para obtener

$$\zeta(s) - \frac{1}{1-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx. \tag{4.5}$$

Ahora, sólo nos falta ver que la serie del lado derecho de (4.5) converge absolutamente para $\text{Re}(s) > 0$. Para ver esto usamos el lema 4.1.3 y reescribimos la integral como una integral sobre una nueva variable u:

$$\left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| \leq \int_n^{n+1} \left| \int_n^x \frac{s}{u^{s+1}} du \right| dx \leq \max_{n \leq x \leq n+1} \left| \int_n^x \frac{s}{u^{s+1}} du \right|, \tag{4.6}$$

además, para $n \leq x \leq n+1$, tenemos que

$$\left| \int_n^x \frac{s}{u^{s+1}} du \right| \leq \int_n^x \left| \frac{s}{u^{s+1}} \right| du \leq \max_{n \leq y \leq n+1} \left| \frac{s}{y^{s+1}} \right|. \tag{4.7}$$

Así, combinando (4.6) y (4.7), obtenemos:

$$\left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \right| \leq \max_{n \leq y \leq n+1} \left| \frac{s}{y^{s+1}} \right| = \frac{|s|}{n^{\text{Re}\, s+1}};$$

el lema se sigue inmediatamente ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s|}{n^{\text{Re}\, s+1}}$ converge absolutamente para $\text{Re}(s) > 0$.
■

Ahora que hemos extendido el dominio de la función Zeta necesitamos conocer alguna información sobre sus ceros en $\text{Re}(s) > 0$. Los siguientes dos lemas nos proporcionarán dicha información.

Corolario 4.1.5 *$\zeta(s)$ se puede extender a una función meromorfa en el semiplano $\text{Re}(s) > 0$, con un polo simple de residuo 1 en $s = 1$ y ningún otro polo.*

Lema 4.1.6 *Para todo x, y en los reales, con $x > 1$, tenemos*

$$\left| \zeta^3(x) \zeta^4(x+iy) \zeta^2(x+2iy) \right| \geq 1. \tag{4.8}$$

Prueba. Usando el lema 4.1.1 basta probar que para cada primo p se tiene

$$\left| \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{p^{x+iy}}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{p^{x+2iy}}\right)^2 \right| \leq 1, \tag{4.9}$$

pero si hacemos $r = \frac{1}{p^x}$ y $e^{i\theta} = \frac{1}{p^{iy}}$, con $0 < r < 1$ entonces podemos reescribir (4.9) como:

$$\left|(1-r)^3\left(1-re^{i\theta}\right)^4\left(1-re^{2i\theta}\right)^2\right| \leq 1. \tag{4.10}$$

De este modo es suficiente probar el hecho elemental de que para todo $0 < r < 1$ y todo $\theta \in R$, se cumple que

$$\left|\left(1-re^{i\theta}\right)^4\left(1-re^{2i\theta}\right)^2\right| \leq \frac{1}{(1-r)^3}. \tag{4.11}$$

Para ver (4.11) fijemos r con $0 < r < 1$, y sea $f(\theta) = \left|\left(1-re^{i\theta}\right)^4\left(1-re^{2i\theta}\right)^2\right|$. Por cómputo directo deducimos que $f(\theta) = \left(1+r^2-2r\cos\theta\right)^2\left(1+r^2-2r\cos 2\theta\right)$.

Haciendo $u = \cos\theta$ y usando la identidad $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, podemos reescribir a $f(\theta)$ de la siguiente manera:

$$f(\theta) := g(u) = \left(1+r^2-2ru\right)^2\left(1+2r+r^2-4ru^2\right).$$

Usando la desigualdad

$$a^2b \leq \left(\frac{2a+b}{3}\right)^3$$

con $a = 1+r^2-2ru$, $b = 1+2r+r^2-4ru^2$, obtenemos

$$g(u) \leq h(u) := \frac{(3+3r^2-2r(2u^2+2u-1))^3}{27}.$$

Cálculo elemental muestra que $h(u)$ se maximiza en $u = -\frac{1}{2}$, así

$$\max_{\theta\in R} f(\theta) = g(-\frac{1}{2}) = (1+r+r^2)^3 < \left(1+r+r^2+...\right)^3 = \frac{1}{(1-r)^3}$$

con lo que se prueba (4.11) y se obtiene el teorema. ■

Lema 4.1.7 $\zeta(s) \neq 0$, *para* $\mathrm{Re}(s) \geq 1$.

Prueba. Por el corolario 4.1.2 sabemos que $\zeta(s) \neq 0$ para $\mathrm{Re}(s) > 1$, así, es suficiente considerar el caso $\mathrm{Re}(s) = 1$.

Ahora, supongamos que $\zeta(s)$ tiene un cero en $s = 1+iy_o$. Sabemos que $\zeta(s)$ es analítica en $s = 1+2iy_o$ y tiene sólo un polo simple en $s = 1$. Así tenemos

$$\lim_{x\to 1^+} \zeta^3(x)\zeta^4(x+iy_o)\zeta^2(x+2iy_o) = 0$$

lo cual contradice el corolario 4.8. ■

Corolario 4.1.8 $\beta(z) = \zeta(s)(s-1)$ *es analítica y sin ceros en* $\mathrm{Re}(s) \geq 1$.

Prueba. De los resultados anteriores se tiene que $\zeta(s)(s-1)$ es analítica y sin ceros en $\mathrm{Re}(s) \geq 1$, con $s \neq 1$. Ahora, por el corolario 4.1.5, se sabe que $s = 1$ es un polo simple de $\zeta(s)$, así:

$$\lim_{s \to 1} \zeta(s)(s-1) = 1,$$

luego, $\zeta(s)(s-1)$ es analítica en $s = 1$, de lo cual se sigue el corolario. ■

4.2 Demostración analítica del teorema del número primo

Lema 4.2.1 *Supongamos que* $|a_n| \leq 1$ *y formemos la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^z}$, *la cual claramente converge a una función* $F(z)$ *analítica en* $\mathrm{Re}(z) > 1$.*Si se cumple que* $F(z)$ *es analítica en* $\mathrm{Re}(z) \geq 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^z}$ *converge en* $\mathrm{Re}(z) \geq 1$.

Prueba. Fijemos w con $\mathrm{Re}(w) \geq 1$. Así $F(w+z)$, vista como función de z es analítica en $\mathrm{Re}(w) \geq 0$.

Ahora escojamos $R \geq 1$, $\delta = \delta(R) > 0$, $\delta \leq \frac{1}{2}$ y $M = M(R)$ tales que

$F(w+z)$ es analítica y acotada por M en $-\delta \leq \mathrm{Re}(z)$, $|z| \leq R$.

Consideremos el contorno Γ, acotado por el arco $|z| = R$, $\mathrm{Re}(z) > -\delta$, y el segmento $\mathrm{Re}(z) = -\delta$, $|z| \leq R$. Denotemos por A y B, respectivamente, las partes de Γ en el semiplano derecho e izquierdo.

Sea $G(z) = F(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)$, donde N es un número natural que definiremos mas adelante.

Consideremos dos casos: primero supongamos que $F(w) = 0$. Luego la función G es analitica en cero, ya que $F(z+w)$ se puede escribir como $F(z+w) = z^n h(z)$, donde n es la multiplicidad del cero y $h(z)$ es una función analítica. De esta manera, por el teorema de Cauchy, tenemos que

$$\int_{\Gamma} F(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz = 0 = 2\pi i F(w).$$

Ahora, supongamos que $F(w) \neq 0$. Entonces $G(z)$ resulta ser una función con un polo simple en $z = 0$, cuyo residuo es $F(w)$, ya que

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to 0} zG(z) &= \lim_{z \to 0} zF(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) \\
&= \lim_{z \to 0} F(z+w)N^z \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \\
&= \lim_{z \to 0} F(z+w) \lim_{z \to 0} N^z \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \\
&= F(w).
\end{aligned}$$

Así, por el teorema del residuo, tenemos

$$2\pi i F(w) = \int_{\Gamma} F(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz. \tag{4.12}$$

Ahora , $F(z+w)$ es igual a su serie en A, por lo tanto la podemos partir dicha serie en su suma parcial $S_N(z+w)$ y un residuo $r_N(z+w)$. De nuevo por el teorema del residuo, tenemos

$$\int_{A} S_N(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz = 2\pi i S_N(w) - \int_{-A} S_N(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz,$$

donde $-A$ denota como es usual la reflexión de A en el origen. Cambiando z por $-z$, la igualdad anterior puede escribirse como

$$\int_{A} S_N(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz = 2\pi i S_N(w) - \int_{A} S_N(z-w)N^{-z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz. \tag{4.13}$$

Combinando (4.12) y (4.13), obtenemos

$$\begin{aligned} 2\pi i(F(w) - S_N(w)) &= \int_{A} \left(r_N(z+w)N^z + \frac{S_N(z-w)}{N^z}\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \\ &\quad + \int_{B} F(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ahora si $\mathrm{Re}(z) = x$, entonces, para estimar las integrales anteriores, primero debemos notar lo siguiente:

$$\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} = \frac{2x}{R^2} \text{ en el arco } \mathrm{Re}(z) = R, \text{ (en parficular en } A), \tag{4.15}$$

$$\left|\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right| \le \frac{1}{\delta}\left(1 + \frac{|z|^2}{R^2}\right) \le \frac{2}{\delta} \text{ en la línea } \mathrm{Re}(z) = -\delta,\ |z| \le R, \tag{4.16}$$

$$|r_N(z+w)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+1}} \le \int_N^{\infty} \frac{dy}{y^{x+1}} = \frac{1}{xN^x}, \tag{4.17}$$

$$|S_N(w-z)| \le \sum_{n=1}^{N} n^{x+1} \le N^{x-1} + \int_0^N y^{x-1} dy = N^x \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{x}\right). \tag{4.18}$$

Por (4.15), (4.17) y (4.18) obtenemos, para z en A, lo siguiente:

$$\left|\left(r_N(z+w)N^z - \frac{S_N(w-z)}{N^Z}\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)\right| \le \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{N}\right)\frac{2x}{R^2} \le \frac{4}{R^2} + \frac{2}{RN},$$

así, obtenemos

$$\left|\int_A \left(r_N(z+w)N^z - \frac{S_N(w-z)}{N^Z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| \leq \frac{4\pi}{R}+\frac{2\pi}{N}. \tag{4.19}$$

De otra parte por (4.15) y (4.16) tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_B F(z+w)N^z\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| &\leq \int_{-R}^{R} MN^{-\delta}\frac{2}{\delta}dy + 2M\int_{-\delta}^{0} N^x \frac{2\,|x|}{R^2}\frac{3}{2}dx \\ &\leq \frac{4MR}{\delta N^{\delta}} + \frac{6M}{R^2 \ln^2 N}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ahora, utilizando (4.19) y (4.20) en (4.14), concluimos

$$|F(w) - S_N(w)| \leq \frac{2}{R}+\frac{1}{N}+\frac{MR}{\delta N^{\delta}}+\frac{M}{R^2\ln^2 N};$$

luego, si fijamos $R = \frac{3}{\epsilon}$, verificamos inmediatamente que el lado derecho de la desigualdad anterior está acotado por ϵ para N suficientemente grande. De este modo hemos verificado nuestra definición de convergencia. ■

Teorema 4.2.2 *Para* $\mathrm{Re}(z) > 1$, *tenemos que*

$$\frac{z-1}{\beta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^z}. \tag{4.21}$$

Prueba. Dado que $|\mu(n)| \leq 1$ para cada n en los naturales, se verifica que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^z}$ converge absolutamente para $\mathrm{Re}(z) > 1$.

Ahora, dado z en la región $\mathrm{Re}(z) > 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\varsigma(z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^z} &= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^z}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^z}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{m^z n^z} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z}\left(\sum_{d|k}\mu(d)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z}\left[\frac{1}{k}\right] = 1.\end{aligned}$$

■

Teorema 4.2.3 (Teorema del número primo) $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

Prueba. Veremos el teorema del número primo en la forma $U(x) = o(1)$.

Dado que $|\mu(n)| \leq 1$ y $\frac{z-1}{\beta(z)}$ es analítica en $\mathrm{Re}(z) \geq 1$; en virtud del lema 4.2.1 y de (4.21) concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n} = 0$, esto es, $U(x) = o(x)$. ■

Bibliografía

[APOS] T. Apostol, *Introducción a la Teoría Analítica de Números*, Editorial Reverté, 1980.

[BAKE] M. Baker y D. Clark, *The Prime Number Theorem*, http://www.math.uga.edu/~mbaker/pdf/pnt2.pdf, Diciembre de 2001.

[BATE] P. Bateman y H. Diamond, *A Hundred Years of the Prime Number Theorem,* American Mathematical Montly (1996), 729-741.

[CILL] J. Cilleruelo y A. Córdoba, *La teoría de los Números*, Mondadori, Madrid, 1992.

[HADA] J. Hadamard, *Sur la distribution des zeros de la fonction* $\varsigma(s)$ *et ses consequences arithmetiques*, Bull. de la Soc. math de France, 24 (1896), 199-220.

[KORE] J. Korevaar, *On Newman's Quick Way to the Prime Number Theorem*, Mathematical Intelligencer (1982), 108-115.

[LANG] S. Lang, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, 1993.

[NEWM] D. Newman, *Simple Analytic Proof of The Prime Number Theorem*, American Mathematical Montly (1980), 693-696.

[PALK] B. Palka, *An Introduccion to Complex Funtion Theory*, Springer-Verlag, 1991.

[ROSE] H. E. Rose, *A course in Number Theory,* Oxford University Press, 1988.

[VALL] C. J. de la Vallee Poussin, *Recherches Analytiques sur la theorie des nombres premiers,* Ann. de la Soc.Scientifique de Bruxelles, 20 (1896), 183-256 & 281-397.

[ZAGI] D. Zagier, *Newman's Short Proof of the Prime NumberTheorem*, American Mathematical Montly, October (1997), 705-708.